**Making the function of production a thing of the past?**

**Putting an end to the function of production... forever?**

**En finir, pour toujours, avec la fonction de production agrégée ?**

**Introduction**

La publication, avec le succès que l’on sait, du livre de Thomas Piketty *Le capital du XXIe siècle* a été à l’origine d’innombrables débats, qui portent aussi bien sur des questions pratiques (collecte et traitement des données) que théoriques. En ce qui concerne ces dernières, le principal reproche fait à Piketty – du moins par ceux qui ont quelque peu réfléchi sur la question – est la façon dont il reprend telle quelle l’idée de fonction de production agrégée et donc la théorie de la répartition qui lui est associée. Piketty se contente en fait d’évoquer brièvement la fameuse « controverse des deux Cambridge », tout en expliquant qu’elle a été (définitivement) réglée dans « les années 1970 », où « le modèle néoclassique de croissance de Solow … l’a emporté ».

Le hasard a voulu que pratiquement au même moment que le livre de Piketty soit publié celui de Jesus Felipe et John McCombie, The Aggregate Production Function and the Measurement of Technical Change: Not Even Wrong, où ils montrent comment les « preuves empiriques » censées avoir permis au modèle néoclassique de l’« emporter », s’expliquent par la présence d’une identité comptable (qui n’est, bien entendu, pas propre à ce modèle), éventuellement associée à un ou deux faits stylisés.

Felipe et McCombie sont loin d’être les premiers à avoir suspecté que, derrière les coefficients de corrélation très élevés obtenus en ajustant des fonctions de production agrégées à certains types de données, il y a une identité comptable, inhérente à la façon dont ces données sont mesurées. Ils rappellent d’ailleurs comment, au sein même du courant néoclassique, certaines voix prestigieuses – dont celles d’Henry Phelps-Brown, de Franklin Fisher, de Herbert Simon et, même, de Paul Samuelson – se sont élevées pour mettre en garde contre l’interprétation erronée qui était donnée des résultats obtenus par Cobb, Douglas et Solow, entre autres. Solow a d’ailleurs manifesté « sa surprise » devant ces résultats – des coefficients de corrélation supérieurs à 0,99 sont loin d’être courants en économie et il n’ignorait pas, évidemment, les problèmes insurmontables que pose aussi bien l’agrégation des biens que celle des fonctions de production. Felipe et McCombie ne se contentent pas, toutefois, de rappeler ces critiques, déjà anciennes, à la fonction de production agrégée. Ils leur donnent une forme achevée et, surtout, montrent – en reprenant et en actualisant les données utilisées par Cobb, Douglas, Solow et bien d’autres, et en effectuant divers types de simulations – que l’explication par la combinaison d’une identité comptable et de faits stylisés est au moins aussi performante que celle qui fait appel à une hypothétique fonction de production, dont l’existence apparaît comme un défi au bon sens.

Felipe et McCombie savent très bien qu’en procédant de la sorte, ils sapent l’un des piliers de la théorie économique dominante. C’est pourquoi ils cherchent à contrer toutes les objections qui peuvent, ou pourraient, leur être faites. Il s’ensuit une certaine lourdeur dans la présentation de leur livre, qui n’arrive pas toujours à établir une ligne de partage entre ce qui est essentiel et ce qui ne l’est pas. Les non initiés risquent ainsi de perdre pied, notamment dans la lecture des premiers chapitres, un peu trop touffus – les choses s’éclaircissant par la suite, mais le livre est long ! D’où l’intérêt, nous semble-t-il, d’en donner un compte rendu où sont repris les arguments essentiels de Felipe et McCombie – arguments qui sont relativement simples, tout en ayant une portée bien plus grande que ceux, souvent invoqués, sur le *reswitching*.

Commençons par un (très) bref rappel sur les problèmes posés par la notion de fonction de production ainsi que par ceux soulevés par l’agrégation, des biens et des fonctions.

1. La fonction de production en théorie et en pratique
2. The production function in theory and in practice

Une fonction de production établit, par définition, une relation entre des *quantités* de biens – le produit (*output*) est obtenu à partir d’*inputs* en faisant appel à la technique la plus efficace. Même au niveau microéconomique, il est pratiquement impossible de trouver des exemples de fonctions de ce genre, tellement la production de n’importe quel objet fait intervenir des éléments divers et variés, dont une bonne partie sont indivisibles (locaux, outils, équipements). Felipe et McCombie ne s’attardent pas sur le cas microéconomique – ils admettent même l’existence de ces fonctions dans certaines de leurs simulations – puisqu’ils s’intéressent aux travaux économétriques, qui ne portent que sur le cas agrégé. Celui-ci a, entre autres, l’avantage de mieux faire passer l’idée de substituabilité entre « facteurs » qu’au niveau de l’entreprise, où le bon sens veut que la stricte complémentarité soit de mise – au prix cependant d’un certain flou, comme le montre cette citation d’Edmond Malinvaud, un des rares auteurs qui n’élude pas la question de l’agrégation :

A production function establishes, by definition, a relationship between quantities of goods – the product (output) is obtained from the inputs using the most efficient technique. Even on the microeconomic level, it is basically impossible to find examples of such functions, so much that the production of whatever item involves a variety of different elements, of which a good part is undividable (facilities, tools, equipements). F & M don’t dwell too much on the microeconomic study (aspect) - they even admit the existence of these functions in some of their simulations – since they are interested in the econometrical studies, which only operate at the level of the aggregate function(?). This has the advantage of making economists accept more easily the assumption of substitutability between “factors” whereas, at the company level, common sense would dictate complementary. An advantage that spurs more from the ambiguity that comes with working at the aggregate level rather than on real grounds, as shown in this quote of Edmond Malinvaud – one of the few authors that don’t elude the aggregation problem:

Au niveau global, il faut […] tenir compte de ce que le même volume de production peut avoir une composition très variable. Ainsi, remplacer les textiles naturels par des textiles artificiels peut se traduire par une réduction du travail employé et par une augmentation du capital. Il peut en aller de même avec le remplacement des produits alimentaires manufacturés ou conservés aux produits purement agricoles. (Malinvaud, 1981, p. 125)

At the aggregate level, one has to […] take into account that the same volume of production can have very different composition. For example, to replace natural fabrics with artificial ones can translate into a reduction of workforce and an increase in capital required. The same can happen with the substitution of purely agricultural food products with industrial ones.

La substitution entre capital et travail est ainsi accompagnée d’une substitution entre biens, ce qui fait intervenir des éléments autres que techniques, tels que les goûts des consommateurs. À cela s’ajoutent les délais de mise en oeuvre, qui font que cette substitution « joue un plus grand rôle dans l’étude de la croissance de long terme que dans celle des phénomènes conjoncturels » (p. 124). En admettant que les substitutions sont instantanées, le « niveau global » dont parle Malinvaud suppose néanmoins des productions (hétéroclites) et des *inputs* (regroupés dans la variable « capital ») *en valeur*. Le fait de remplacer des quantités par des valeurs dans la mesure de certaines variables peut sembler anodin. Il n’en est pourtant rien, les variables en valeur, surtout quand elles sont d’ordre global, macroéconomique, peuvent être liées par des identités comptables, qui font croire à l’existence de relations causales là où il n’y en a pas. James Cobb et Paul Douglas, qui ont donné leur nom à une fonction célèbre en économie, sont les premiers à être tombés dans le piège.

The substitution between capital and labor is thus accompanied by a substitution between goods, which makes intervene elements other than technical, such as the tastes of consumers. Added to this are the deadlines for implementation, which make this substitution “play a greater role in the study of the long-term growth than in the one of cyclical phenomena” (p. 124). Assuming that the substitutions are instantaneous, the "overall level" which Malinvaud talked about presupposes nevertheless productions (heterogeneous) and inputs (grouped together in the variable "capital") *in value*. Replacing the quantities with values in the case of some variables may appear harmless. It is nothing of the sort, however, the variables in value, especially when they are of a global nature, macroeconomic, can be related by accounting identities, which make believe in the existence of causal relations where there are not. James Cobb and Paul Douglas, who gave their name to a function famous in economics, are the first to be fallen into the trap.

2. La « divine surprise » de l’ajustement par la fonction de

Cobb-Douglas

Felipe et McCombie rappellent comment Cobb et Douglas eurent l’idée, en 1928, d’ajuster une fonction de la forme *F*(*K,L*) = *AL*α*K*β aux données dont ils disposaient sur le PIB des États-Unis entre 1899 et 1922. À leur grande satisfaction, ils trouvèrent des estimations de α et β dont la somme est peu différente de 1, avec des valeurs concernant la part du revenu allant au travail et au capital proches de celles qui sont effectivement observées. Ce qui, comme Douglas le dira bien plus tard lors de son discours en tant que président de l’*American Economic Association*, « renforçait la théorie concurrentielle de la répartition et réfutait les thèses marxistes » (Douglas, 1976)4. Sur le moment, cette dimension idéologique n’a néanmoins pas empêché la critique, surtout qu’à l’époque, le scepticisme dominait en ce qui concerne l’intérêt et la portée des études économétriques. Un des principaux reproches faits à Cobb et Douglas est le rôle quasiment absent du progrès technique dans leur fonction. En effet, le paramètre *A* y est considéré comme constant. La croissance par tête ne provenait donc que de celle du capital par tête, contrairement à ce que l’on peut observer. Felipe et McCombie reprennent les données de Cobb et Douglas et montrent que leurs résultats comportent une part de chance, due notamment au choix des années considérées. Douglas en était d’ailleurs conscient puisqu’il a opté ensuite pour l’étude des données inter-industries (ne comportant plus de dimension temporelle), ce qui évite ainsi le problème du progrès technique. Il obtient alors des résultats bien meilleurs, sans toutefois parvenir à vraiment convaincre la profession, qui n’avait pas complètement perdu son bon sens – comment admettre que les industries d’un pays, dans toutes leur diversité, puissent être décrites (correctement) par une fonction à deux variables ?

1. The "divine surprise" of the adjustment by the Cobb-Douglas function

Felipe and McCombie remember how Cobb and Douglas had the idea, in 1928, to adjust a function of the form *F*(K*,L*) = *AL*α*k*ßto the data that they had on the GDP of the United States between 1899 and 1922.

To their great satisfaction, they found estimates of α and β whose sum is little different from 1, with the values concerning the share of income going to labor and capital that are closer to those actually observed. This, as Douglas will tell much later during his speech as president of the *American Economic Association*, "reinforced the competitive theory of the distribution and refuted the marxist theses" (Douglas, 1976)4. This ideological dimension did not, however, prevent criticism, especially that at the time, skepticism prevailed regarding the interest and scope of econometric studies. One of the main criticisms made at Cobb and Douglas is the role almost absent of technical progress in their function. As a matter of fact, the parameter A is there regarded as constant. The growth pro capita was therefore that of capital pro capita, contrary to what we can observe. Felipe and McCombie resume the data of Cobb and Douglas and show that their results are due in part to luck, in particular on account of the choice of the years considered. Douglas was, in fact, aware of that since he had opted for the study of inter-industries data (not including any temporal dimension), which avoids the problem of technical progress. He then obtains far better results, without however reach to really convince the profession, which had not completely lost its common sense - how can we accept that the industries of a country, in all their diversity, can be described (correctly) by a function of two variables?

Il a fallu en réalité attendre trente ans pour que la fonction de production agrégée devienne une sorte de fait acquis pour une grande majorité d’économistes. L’article de Robert Solow « Technical Change and the Aggregate Production Function », publié en 1957, a semble-t-il beaucoup contribué à désinhiber les esprits sur ce point. Dans cet article, Solow, qui connaît bien les problèmes (insolubles) posés par l’agrégation, adopte pourtant une attitude très prudente en ce qui concerne cette fonction, puisqu’il le commence en remarquant qu’« il faut un peu plus que l’habituelle “suspension délibérée de la méfiance” pour pouvoir parler sérieusement de la fonction de production agrégée » (Solow, 1957, p. 312). Comme le titre de l’article le signale, son propos est de chercher à isoler puis mesurer l’effet du progrès technique, désigné par la lettre *A* dans la fonction de Cobb et Douglas. Contrairement à eux, Solow considère que cet effet n’est pas constant et propose une méthode pour le mesurer. Ce qui lui permet de l’isoler et de l’« éliminer », de façon à ne garder que ce qui dans le produit – *output* – est dû à la seule combinaison des « facteurs » travail et capital. À partir des données ainsi aménagées, il représente sur un graphique les couples (produit par tête, capital par tête).

In reality it took thirty years for the aggregate production function to become a sort of accepted fact for a large majority of economists. The article by Robert Solow "Technical Change and  the Aggregate Production Function ", published in 1957, seems to have much contributed to disinhibit/freed minds on this point. In this article, Solow, who knows well the (unsolvable) problems posed by the aggregation, adopts a very prudent attitude regarding this function, since it begins by remarking that "it needs a little more than the usual "deliberate suspension of mistrust" to be able to talk seriously about the aggregate production function" (Solow, 1957, p. 312). As the title of the article points out, his purpose is to seek to isolate and then measure the effect of technical progress, identified by the letter A in the function of Cobb and Douglas. Unlike them, Solow considers that this effect is not constant and proposes a method to measure it. This allows him to isolate and "eliminate" it *(??)*, so as to keep only what in the product - *output*- is due to the single combination of "factors" labor and capital. From the data obtained, he represents the pairs on a graph (product pro capita, capital pro capita).

Il obtient un nuage de points ayant la forme d’une droite très légèrement incurvée, avec un Coefficient de corrélation dont le carré est supérieur à 0,99 !5 Ce qui semble l’étonner : « Compte tenu du nombre de tripatouillages (*a priori doctoring*) subi par les données, l’ajustement est d’une qualité remarquable » (*ibid*). En outre, les estimations des élasticités α et β sont très proches des valeurs observées de la part du travail et du capital dans le produit6. La théorie marginaliste de la répartition serait ainsi définitivement confirmée – et le caractère approximatif des résultats de Cobb et Douglas expliqué (par une mauvaise évaluation des effets du progrès technique).

Comme Solow le constate dans sa conférence Nobel, suite aux résultats obtenus dans son article de 1957, « une petite industrie », qui a « été à l’origine de centaines d’articles théoriques et empiriques », s’est constituée autour de la fonction de production agrégée, celle-ci ayant « très rapidement trouvé sa place dans les manuels et dans le fond commun des connaissances de la profession »7. Ce qui ne l’empêche pas de rappeler, trente ans après, sa « surprise » devant les résultats obtenus. Trop beaux pour être vrais ?

He gets a scatter plot in the shape of a right very slightly curved, with a correlation coefficient whose square is higher than 0.99!5 This seems to surprise him: "Given the number of tampering (*a priori doctoring*) suffered by the data, the adjustment is of a remarkable quality" (*ibid.*). In addition, the estimates of the elasticities α and β are very close to the observed values of the share of labor and capital in the product 6. The marginalist theory of apportionment would be therefore definitively confirmed - and the approximate nature of the results of Cobb and Douglas explained (by a poor assessment of the effects of technical progress).

As Solow noted in his Nobel conference, following the results obtained in his 1957 article, "a small industry", which has "been at the origin of hundreds of theoretical and empirical articles", has established itself around the aggregate production function, the latter having "very quickly found its place in the manuals and in the common fund of knowledge of the profession"7. This does not prevent it from remembering, thirty years after, its "surprise" before the results obtained. Too good to be true?

1. Les doutes

The doubts

Peu nombreux furent ceux qui s’interrogèrent sur le résultat « surprenant » de Solow. Il y a bien eu un certain Hogan qui remarqua que dans les données de Solow les parts du travail et du capital sont quasiment constantes (0,344 pour le capital avec un coefficient de variation de 0,05). Si on tient compte de cela, il découle de la façon dont Solow « élimine » les effets du terme *A* dans la fonction de production que le terme restant en *L* et *K* est forcément de la forme *LaK*1 – *a*, où *a* est la part observée du travail (et 1– *a* celle du capital). On est, donc, selon Hogan, en présence d’une tautologie : le résultat obtenu est présent dans les hypothèses (Hogan, 1958). La réponse de Solow à Hogan est passablement embrouillée. Il admet qu’« il aurait dû avertir le lecteur que sa méthode conduit à un ajustement parfait à une Cobb Douglas si les parts observées du capital et du travail sont constantes » (Solow, 1958, p. 412).

Or, elles le sont presque… Quasiment au même moment, Henry Phelps Brown publie un article où il avance une autre explication que celle de Hogan : les bons résultats obtenus avec la fonction de Cobb-Douglas résultent de l’existence d’une identité comptable qui lie les variables (en valeur, pour la plupart) utilisées lors des ajustements économétriques (Phelps Brown, 1957). Si on note *V* la valeur ajoutée d’un pays (ou d’une entreprise, une industrie, un secteur, etc.), *L* la quantité de travail, payé au salaire *w*, et *J* la valeur du « capital », rémunéré au taux  
*r*, alors ces variables sont liées par l’identité comptable :

*V* ≡ *wL + rJ*. Dans ces conditions, la fonction de production testée par Cobb, Douglas, Solow, etc. n’est pas la relation « technique » entre quantités *Q = AL*α*K*β, mais la relation entre valeurs : (2) *V = cL*α*J*β. Phelps Brown remarque qu’on a alors *V ' L =* α*cLα*–1*J*β*= αV/L* et *V ' J =* β*cL*α*J*β–1 *=* β*V/J*. En faisant l’hypothèse « de concurrence parfaite » : *V ' L = w* et *V ' J = r,* il s’ensuit que α *= wL/V* et β *= rJ/V*. Or, il résulte de l’identité (1), divisée par *V*, que : 1 ≡ *wL*  
*V +*  
*rJ*  
*V*, et donc que α + β *=* 1. Ce qui est présenté comme une preuve de la théorie marginaliste de la répartition – rendements constants, élasticités des « facteurs » égales à leur part dans le produit – n’est en fait qu’un leurre : le résultat est dans la façon de calculer les agrégats. Phelps Brown parle des « deux faces d’une même pièce » – ajustement par une Cobb-Douglas et identité comptable.

Few were those who questioned Solow’s "surprising" result. Although there was some Hogan who remarked that in Solow’s data the shares of labor and capital are almost constant (0.344 for the capital with a variation coefficient of 0.05 ). If we take that into account, it stems from the way in which Solow "eliminates" the effects of the term *A*within the production function that the term remaining in *L*and *K*is necessarily of the form *LaK*1 - a , where a is the observed share of labor (and 1- *a*the one of capital). We are, consequentially, according to Hogan, in the presence of a tautology: the result obtained is present in the hypothesis (Hogan, 1958). The response of Solow to Hogan is somewhat blurry. He admits that "he should warn the reader that his method leads to a perfect adaptation of the Cobb Douglas function if the observed shares of capital and labor are constant" (Solow, 1958, p. 412). Or, they nearly are... Almost at the same time, Henry Phelps Brown published an article where he proposes another explanation than that of Hogan : the good results obtained with the Cobb-Douglas functional arise from the existence of an accounting identity that binds the variables (in value, for the most part) used during the econometric adjustments (Phelps Brown, 1957). If we identify as *V*the added value of a country (or a company, an industry, a sector, etc. ), *L*the quantity of work, paid at wage *w*, and *J*the value of "capital", paid at the rate *R ,* then these variables are linked by the accounting identity:

1. *V* ≡ *wL + rJ*.

Within these conditions, the production function tested by Cobb, Douglas, Solow, etc. is not the "technical" relation between quantities *Q = ALαKβ*, but the relationship between values:

1. *V = cL*α*J*β.

Phelps Brown remarks that then we have *V ' L =* α*cLα*–1*J*β*= αV/L* et *V ' J =* β*cL*α*J*β–1 *=* β*V/J*. En faisant l’hypothèse « de concurrence parfaite » : *V ' L = w* et *V ' J = r,* il s’ensuit que α *= wL/V* et β *= rJ/V*. Or, il résulte de l’identité (1), divisée par *V*, que : 1 ≡ *wL*  
*V +*  
*rJ*  
*V*, et donc que α + β *=* 1. This is presented as a proof of the marginalist theory of the distribution - constant returns, elasticity of "factors" equal to their share in the product – it is in fact nothing more than an illusion: the result is in the way of calculating the aggregates. Phelps Brown speaks of the "two sides of the same coin" - adjustment by a Cobb-Douglas and accounting identity.

La critique de Phelps Brown est, semble-t-il, passée inaperçue – bien qu’elle ait été publiée dans une revue prestigieuse8. Elle est, il est vrai, un peu vague. Elle fait ainsi l’impasse sur le fait que les résultats obtenus en ajustant une Cobb-Douglas peuvent parfois être médiocres – ou même mauvais –, ce qui n’est pas compatible avec une identité comptable. Il a fallu attendre encore six ans pour que Simon et Levy reviennent sur l’interprétation erronée à laquelle peut conduire la présence de l’identité comptable (Simon et Levy, 1963). Dans une brève note, ils montrent comment cette identité peut être obtenue en « linéarisant » (par sa différentielle) une fonction de Cobb-Douglas dont les élasticités sont égales aux parts des « facteurs » dans le produit9. Ils supposent pour cela non pas, comme Hogan, que ces parts sont constantes, mais que le salaire et le taux de rendement le sont. Deux approximations donc, qui expliquent pourquoi *R*² n’est pas forcément égal à 1. Herbert Simon se réfère à cette note dans sa conférence Nobel – bien qu’elle ne soit qu’une goutte d’eau dans la « mer » de ses publications10 –, lorsqu’il rappelle que « les résultats empiriques » relatifs aux fonctions de production agrégées « ne permettent pas de tirer de conclusion sur la plausibilité relative » des diverses théories qui sont à l’origine de ces fonctions 11. Felipe et McCombie fournissent une illustration des propos de Simon en procédant à une simulation très simple où ils montrent que l’on peut obtenir des résultats aussi bons que ceux de Solow à partir d’une théorie totalement différente de la sienne 12.

The criticism of Phelps Brown has, it seems, gone unnoticed – despite having been published in a prestigious magazine 8. It is, that is true, a little vague. It thus overlooks the fact that the results obtained by adjusting a Cobb-Douglas can sometimes be mediocre - or even bad -, which is not compatible with an accounting identity. We had to wait another six years for Simon and Levy to go back on the erroneous interpretation to which can reconduct the presence of the accounting identity (Simon and Levy, 1963). In a short note, they show how this identity can be obtained by "linearizing" (by its differential) a Cobb-Douglas function in which the elasticities are equal to the shares of "factors" in the product 9. To do so, they assume not, like Hogan, that these shares are constant, but that the wage and the rate of return are. Two approximations that, therefore, explain why R²is not necessarily equal to 1. Herbert Simon refers to this note in his Nobel conference - although it is only a drop of water in the "sea" of his publications 10 -, when he recalls that "the empirical results" related to the aggregate production functions "do not allow to draw a conclusion on the relative plausibility" of different theories that are at the origin of these functions 11. Felipe and McCombie provide an illustration of the purpose of Simon by performing a very simple simulation where they show the possibility of achieving results as good as those of Solow from a theory completely different from his 12.

1. Une simulation qui donne à réfléchir

Felipe et McCombie se situent dans le cas le plus favorable à l’agrégation, celui où toutes les entreprises sont représentées par la même fonction de Cobb-Douglas à rendements constants. Ils choisissent délibérément des coefficients (élasticités) de cette fonction « à l’opposé » de ceux trouvés par Solow au niveau agrégé : 0,25 pour le travail et 0,75 pour le capital (contre 0,75 et 0,25 pour Solow). Soit, pour chaque entreprise : *F*(*K,L*) = *AK*0,75*L*0,25 – *K* et *L* pouvant varier d’une entreprise à l’autre. Si on suppose des « marchés concurrentiels », les rémunérations du travail et du capital étant données par les productivités marginales en posant  
*F '*  
*L* (*K,L*) = *w* et *F ' K* (*K,L*) = *r*, alors 75 % du revenu de la production va au capital, le reste allant au travail – et ce pour chacune des entreprises 13.

Celles-ci ayant toutes la même fonction de production, on devrait logiquement retrouver ce partage des revenus au niveau global. Mais tel n’est plus forcément le cas si on choisit un autre système d’évaluation du produit et du rendement du capital. Felipe et McCombie supposent ainsi que le prix de l’unique bien produit dans leur simulation est obtenu en rajoutant une marge de 1/3 à son coûten travail – marge qui rémunère le capital. Le travail reçoit donc 75 % (*=* 1/(1+1/3)) de la valeur *V = wL* + 1/3·*wL* de la production, les 25 % restants allant au capital. La simulation de Felipe et McCombie consiste à donner des valeurs aléatoires (en quantités) à deux des trois variables micro, *Q*, *K* et *L* – la restante se déduisant de la relation *Q = F*(*K*,*L*). Après agrégation, en valeur, ils ajustent la fonction de production macro *V = uL*α*J*β sur les données ainsi obtenues. Ils obtiennent des résultats au moins aussi bons que ceux de Solow (un *R*² supérieur à 0,99) et des coefficients estimés de α et β très proches des siens (0,75 pour le travail et 0,25 pour le capital). Ce qui n’a rien de surprenant, puisque ces coefficients sont en fait déterminés par l’identité comptable *V ≡ wL + rJ* avec, vu la règle de fixation des prix,  
*rJ =* 1/3·*wL*. Ce résultat invalide ainsi la théorie marginaliste de la répartition – qui, étant donné les valeurs de α et β au niveau micro, prédit le partage : 25 % pour le travail et 75 % pour le capital. La nécessité de recourir à un système de prix modifie complètement la donne « technique » – pourtant claire dans l’exemple choisi.

Felipe et McCombie montrent ainsi, comme l’ont fait Simon, Lévy et Fisher avant eux, que les résultats concernant des fonctions de production agrégées ne permettent pas de trancher entre plusieurs théories censées les expliquer14. Mais ils n’en restent pas là, puisqu’ils fournissent une grille de lecture plus générale que celle de Simon, Lévy et Fisher, qui permet d’expliquer tous les résultats obtenus en supposant l’existence de fonctions de production – dont certaines des variables sont mesurées en valeur – sans avoir besoin de faire cette hypothèse. Ils s’inspirent en cela de la démarche de Shaikh qui a montré en 1974 – 17 ans après l’article de Solow ! – comment l’identité comptable peut être transformée, à certaines conditions, en une relation de Cobb-Douglas (Shaikh, 1974)

4. A thought-provoking simulation

Felipe and McCombie are located in the case the more favorable to the aggregation, the one where all the companies are represented by the same function of Cobb-Douglas with constant returns. They deliberately choose the coefficients (elasticities) of this function "to the opposite" of those found by Solow at the aggregate level: 0.25 for the labor and 0.75 for the capital (it was 0.75 and 0.25 for Solow). So, for each company: *F(K,L) = AK 0.75 L 0.25 -*with *K* and *L* that can vary from one company to another. If we assume "competitive markets ", the remuneration of labor and capital are given by the marginal productivities in asking *F ' L (K,L) = w and F ' K (K,L) = r*, then 75% of the revenue of the production goes to capital, the remainder goes to work - and this for each of the companies 13. As they have all the same production function, logically we should find this sharing of revenues at the global level. But this is no longer strictly the case if one chooses a different system of evaluation of the product and the return of the capital. Felipe and McCombie assume as well that the price of the single good produced in their simulation is obtained by adding a margin of 1/3 to its cost in work - margin which pays the capital. The work therefore receives 75 per cent (= 1/ (1 +1/3)) of the value *V = wL + 1/3·wL* of the production, the remaining 25 per cent going to the capital. The simulation of Felipe and McCombie is to give aleatory variables (in quantities) to two of the three variables micro, *Q, K* and *L* - the remaining deducible from the relationship *Q = F(K,L).* After aggregation, in value, they adjust the production function macro *V = uLαJβ* on the data thus obtained. They get results at least as good as those of Solow (an *R²* greater than 0.99 ) and the estimated coefficients of α and β very close to his own (0.75 for the labor and 0.25 for the capital). This is not surprising, as these coefficients are in fact determined by the accounting identity *V ≡ wL + J* with, given the rule of price fixing, *rJ = 1/3·wL*. This result invalids as well the marginalist theory of the distribution - which, given the values of α and β at the micro level, predicts the sharing: 25 per cent for the labor and 75 per cent for capital. The need to resort to a system of price completely changes the given "technique" - nonetheless clear in the example chosen.

Felipe and McCombie show as well, like Simon, Levy and Fisher did before them, that the results concerning the functions of aggregated production does not allow to decide between several theories supposed to the explain them 14. But they do not stop there, since they provide a framework of explanation more general than that of Simon, Levy and Fisher, which allows to explain all the results obtained by assuming the existence of production features – where some variables are measured in value - without the need to make this hypothesis. They are inspired in this of the approach of Shaikh who has shown in 1974 - 17 years after Solow’s article! - how the accounting identity can be transformed, in certain conditions, in a relation of Cobb-Douglas (Shaikh, 1974).

1. Le mystère (définitivement) éclairci

Shaikh (1974) commence par dériver les deux membres de l’identité comptable *V ≡ wL + rJ* , en supposant que toutes les variables peuvent varier dans le temps – ou dans l’espace, selon le type d’étude faite. Soit : *V*′ ≡ *w*′*L*+ *wL*′+*r*′*J*+*rJ*′. En divisant par *V* il vient :

1. *V′*

*V ≡*  
*w′L*  
*V + wL′V + r′JV + rJ′V*.

En notant *x*^ le taux de croissance *x′/x* et *a = wL/V* la part du travail (et donc 1 – *a* la part du capital, *rJ/V*) dans le produit, puis en remarquant que *w′L*  
*V =*  
*ww′L*  
*wV =*  
*wL*  
*V*  
*w′*  
*w*  
*= aw*^ , *wL′*  
*V =*  
*wL′L*  
*VL = wLV LL′ = aL^* , etc., l’égalité (3) peut se mettre sous la forme : (4) *V′*  
*V + wL′V + r′JV + rJ′V*.

En notant *x*^ le taux de croissance *x′/x* et *a = wL/V* la part du travail (et donc 1 – *a* la part du capital, *rJ/V*) dans le produit, puis en remarquant que *w′L*  
*V =*  
*ww′L*  
*wV =*  
*wL*  
*V*  
*w′*  
*w*  
*= aw*^ , *wL′*  
*V =*  
*wL′L*  
*VL = wLV LL′ = aL^* , etc., l’égalité (3) peut se mettre sous la forme : (4) *V′*  
*V ≡ aw*^ *+* (1 – *a*) *r*^ *+ aL*^ *+* (1 – *a*) *J*^ *.*

Si on admet, en outre, le « fait stylisé » selon lequel les parts du travail et du capital sont constantes (dans le temps ou dans l’espace, selon le cas), on montre par un calcul simple que l’identité comptable (4) implique l’identité :

1. *V ≡ BLaJ*1 –*a*

où *B = a* –*a*(1– *a*) – (1–*a*) *wa r*1 –*a* ne dépend ni de *L*, ni de *J* 15

L’identité (5) ressemble furieusement à la relation de Cobb-Douglas ! Il se peut donc que celui qui effectue (bêtement …) une régression de *V* sur *L* et *J* en croyant tester une relation causale obtienne un ajustement « parfait » (avec un *R*² égal à 1) – il suffit pour cela que les éléments *a*, *w* et *r* de *B* soient tous constants – alors qu’il ne fait que « tester » une identité comptable. La formule (5), qui peut être obtenue par n’importe quel étudiant en première année d’économie, explique ainsi le « mystère » de la fonction de production agrégée. Elle permet de comprendre, par exemple, pourquoi les ajustements par une Cobb-Douglas peuvent être parfois excellents et d’autres fois médiocres, ou même très mauvais. Tout dépend de la validité des « faits stylisés » : degré de variabilité de *a* au moment du passage de (4) à (5), à laquelle peut s’ajouter celui de *w* ou *r*, qui influencent, avec *a*, le terme *B* (*= a*–*a*(1–*a*)– (1–*a*) *wa r* 1 –*a*) de la relation (5)16. Felipe et McCombie montrent ainsi comment dans certains cas de variabilité relativement importante de ces paramètres, le passage de (4) à (5) se fait mieux avec des fonctions « plus flexibles ». D’où leur conclusion :

*l’utilisation de données en valeur signifie qu’il est toujours possible d’obtenir, en  
raison de l’identité comptable sous-jacente, un très bon ajustement à ces données  
avec des fonctions de Cobb-Douglas, CES ou plus flexibles, telles que la fonction  
translog, les élasticités étant égales aux parts des facteurs (p. 344).*

Felipe et McCombie passent aussi en revue les arguments des (rares) auteurs qui ont essayé de nier le rôle de l’identité comptable. Ils montrent que tous supposent implicitement l’existence d’une fonction de production agrégée, tout en laissant croire – ou, pire, en croyant – que les (bons) ajustements obtenus prouvent cette existence. Exemple typique de raisonnement circulaire

5. The mystery (finally) clarified

Shaikh (1974) begins by deriving the two members of the accounting identity *V ≡ wL + rJ*, assuming that all the variables may vary in time - or in the space, depending on the type of study done. Either: *V' ≡ w'L+ wL' +r'J+rJ'*. By dividing by *V* it originates:

1. *V′*

*V ≡*  
*w′L*  
*V + wL′V + r′JV + rJ′V*.

En notant *x*^ le taux de croissance *x′/x* et *a = wL/V* la part du travail (et donc 1 – *a* la part du capital, *rJ/V*) dans le produit, puis en remarquant que *w′L*  
*V =*  
*ww′L*  
*wV =*  
*wL*  
*V*  
*w′*  
*w*  
*= aw*^ , *wL′*  
*V =*  
*wL′L*  
*VL = wLV LL′ = aL^* , etc., l’égalité (3) peut se mettre sous la forme : (4) *V′*  
*V + wL′V + r′JV + rJ′V*.

En notant *x*^ le taux de croissance *x′/x* et *a = wL/V* la part du travail (et donc 1 – *a* la part du capital, *rJ/V*) dans le produit, puis en remarquant que *w′L*  
*V =*  
*ww′L*  
*wV =*  
*wL*  
*V*  
*w′*  
*w*  
*= aw*^ , *wL′*  
*V =*  
*wL′L*  
*VL = wLV LL′ = aL^* , etc., l’égalité (3) peut se mettre sous la forme : (4) *V′*  
*V ≡ aw*^ *+* (1 – *a*) *r*^ *+ aL*^ *+* (1 – *a*) *J*^ *.*

In addition, if it is accepted, the "stylized fact" according to which the shares of labor and capital are constant (in time or space, depending on the case), it is shown by a simple calculation that the accounting identity (4) implies the identity:

*(5)V ≡ BLaJ*1 –*a*

where *B = a* –*a*(1– *a*) – (1–*a*) *wa r*1 –*a* ne dépend ni de *L*, ni de *J* 15

The identity (5) looks incredibly like the relation of Cobb-Douglas! It may be, therefore, that the one who performs (stupidly …) a regression of *V* on *L* and *J* believing to test a causal relationship gets a "perfect" adjustment (with a *R²* equal to 1) - it is sufficient for that purpose that the elements *a, w* and *r* of *B* are all constant - since what it does is just to "test" an accounting identity. The formula (5), which may be obtained by any first year student of Economics, therefore explains the "mystery" of the aggregate production function. It allows us to understand, for example, why the adjustments according to a Cobb-Douglas can be sometimes excellent and other times mediocre, or even very bad. It all depends on the validity of the "stylized facts": the degree of variability of *a* at the time of the passage from (4) to (5), to which it may be added that of *w* or *r*, which influence, along with *a*, the term *B (= a-a(1-a)- (1-a) wa r 1 -a)* of the relationship (5) 16. Felipe and McCombie also show how in some cases of relatively important variability of these parameters, the transition from (4) to (5) is better done with "more flexible" functions. From which their conclusion :

The use of value data means that it is always possible to obtain, thanks to the underlying accounting identity, a very good adjustment to these data with Cobb-Douglas functions, THESE or more flexible, such as the translog function, the elasticities being equal to the shares of the factors (344).

Felipe and McCombie also review the arguments of the (rare) authors who have tried to deny the role of the accounting identity. They show that they all implicitly assume the existence of an aggregate production function, while leaving to believe - or, even worse, believing - that the (good) adjustments obtained prove this existence. Typical example of circular reasoning.

6. Sur la « productivité globale des facteurs »

Le propos initial de l’article de Solow de 1957, qui a été à l’origine de la « petite industrie » qui s’est formée autour de la fonction de production agrégée, était de distinguer, dans la croissance, ce qui est relatif aux « facteurs » proprement dits, et le « reste », qui peut être attribué au progrès technique – en un sens large – et qui a été désigné par la suite par le terme vague « productivité globale des facteurs ». Ainsi, dans le cas de la relation de Cobb Douglas « en quantités » :

*Q* = *AL*α*K*1 –α,

dont on prend la dérivée logarithmique, on a :

(5) *Q*^ = *c*^ + α*L*^ + (1 – α)*K*^ , avec *c*^ = *A′/A*.

Si on considère que le terme α*L*^ + (1 – α)*K*^ représente le taux de croissance des facteurs (pondérés par leur « part » dans le produit), alors on peut voir dans le terme *c*^ le représentant des facteurs « autres » qui influencent la croissance du produit – essentiellement, le progrès technique. Si on note φ ce terme, il découle de (5) qu’il est donné par la différence, ou « le reste » :

(6) φ = *Q*^ – α*L*^ – (1 – α)*K*^ .

La mesure de φ n’est toutefois valable qu’au niveau d’une entreprise, en supposant qu’elle peut être décrite par une fonction de Cobb-Douglas dans laquelle *K* désigne une quantité (de « machines », par exemple) – hypothèse jamais vérifiée, évidemment. « Dans la pratique », on fait appel à des variables en valeur et on préfère parler de « productivité globale des facteurs » (*PGF*). Par analogie avec (6), en remplaçant *Q* par *V* et *K* par *J*, on obtient l’équivalent en valeur de φ :

(7) *PGF*^ = *V*^ – *aL*^ – (1 – *a*) *J*^ .

Bien que les formules (6) et (7) se ressemblent beaucoup, elles peuvent conduire à des résultats radicalement différents. Pour s’en rendre compte, il suffit de reprendre la simulation décrite plus haut : l’effet « réel » du progrès technique φ y est donné par la formule (6) avec α *=* 0,25 (rappelons qu’il a été supposé que toutes les entreprises ont la même fonction de production) mais sa valeur « observée » est donnée par la formule (7) où, en raison de la règle de prix adoptée (coût en travail + marge), on a *a =* 0,75. La variable *PGF*^ donne donc une estimation totalement erronée de la « vraie valeur » φ 17.

Dans le cas où on suppose que la part des « facteurs » est constante (« fait stylisé »), si on se reporte à l’identité (5), *V ≡ BLaJ*1 –*a*, en procédant comme on l’a fait pour (6) et (7) – passage aux logarithmes puis dérivation – on obtient :

^*V* ≡ *B*^ + *aL*^ + (1 – *a*) *J*^

et donc

(8) *B*^ ≡ *V*^ – *aL*^ – (1 – *a*) *J*^ (≡ *PGF*^ ).

Ainsi, en comparant avec (7), on voit que le taux de variation de la productivité globale des facteurs est donné par la dérivée logarithmique de *B = a* –*a*(1– *a*)1 –*a wa r*1 –*a* , soit, puisqu’on suppose *a* constant :  
*PGF*^ = *aw*^ + (1 – *a*) *r*^ .

Comme le disent Felipe et McCombie : « ce que la théorie néoclassique appelle “productivité globale des facteurs” est, *tautologiquement*, une fonction des salaires et des taux de profit » (p. 209, leurs italiques), ce qui n’explique rien – notamment quand on compare des pays entre eux. De toutes façons, « dans la mesure où il n’existe pas de fonction de production sous-jacente, il n’est pas possible de calculer séparément la contribution à la croissance du progrès technique (croissance de la *PGF*) et la croissance de chaque facteur » (*ibid*) 18. Il est évidemment toujours possible de calculer des termes tels que celui donné par la formule (7), tout en sachant qu’il découle d’une identité comptable et non de relations qui traduiraient l’évolution technique de l’économie. Reste à les interpréter, alors qu’ils ont été débarrassés de leur gangue idéologique (la théorie marginaliste de la répartition).

6. On the "total factor productivity"

The initial comments of Solow’s 1957 article, which was at the origin of the "small industry" that has formed around the aggregate production function, was to distinguish, in the growth, which is relative to the "factors" themselves, and the "rest", which can be attributed to technical progress - in a broad sense - and which has been subsequently designated by the vague term "total factor productivity". Thus, in the case of the Cobb Douglas relation "in quantities":

*Q* = *AL*α*K*1 –α,

in which we take the logarithmic derivative, we have:

(5) *Q*^ = *c*^ + α*L*^ + (1 – α)*K*^ , avec *c*^ = *A′/A*.

If we consider that the term α*L*^ + (1 – α)*K*^ represents the growth rate of the factors (weighted by their "share" in the product), then we can see in the term *c^* the representative of the "other" factors which influence the growth of the product - essentially, the technical progress. If we identify this term as *φ*, it follows from (5) that it is given by the difference, or "the rest":

(6) φ = *Q*^ – α*L*^ – (1 – α)*K*^ .

The measurement of φ is, however, valid only at a company level, assuming that such enterprise can be described by a Cobb-Douglas function in which *K* designates a quantity (of 'machinery', for example) - hypothesis never verified, of course.

"In practice", we resort to variables in value and we prefer to talk about "total factor productivity" (TFG). By analogy with (6), by replacing *Q* with *V* and *K* with *J*, we obtain the equivalent in value of φ:

(7) *PGF*^ = *V*^ – *aL*^ – (1 – *a*) *J*^ .

Although the formulae (6) and (7) are very similar, they may lead to drastically different results. To see this, it is sufficient to resume the simulation described above: the "real" effect of the technical progress *φ* y is given by the formula (6) with α = 0.25 (remember that it has been assumed that all companies have the same production function) but its "observed" value is given by the formula (7) or, because of the price rule adopted (cost in work + margin), it was *a* = 0.75 . The variable *TFG*^ therefore gives a wholly erroneous estimate of the "true value" φ 17.

In the case where it is assumed that the share of "factors" is constant ("stylized fact" ), if we refer back to the identity (5), *V ≡ Blaj1 -a*, proceeding as done for (6) and (7) - passing to logarithms and then derivation - we obtain:

^*V* ≡ *B*^ + *aL*^ + (1 – *a*) *J*^

And therefore :

(8) *B*^ ≡ *V*^ – *aL*^ – (1 – *a*) *J*^ (≡ *PGF*^ ).

Therefore, comparing that with (7), we see that the rate of change of the total factor productivity is given by the logarithmic derivative of *B = a* –*a*(1– *a*)1 –*a wa r*1 –*a*, whether, since we assume *a* is constant:

*PGF*^ = *aw*^ + (1 – *a*) *r*^ .

As Felipe and McCombie said: "what the neoclassical theory called "total factor productivity " is, tautologically, a function of wages and profit rates " (p. 209, their italics), which explains nothing - especially when one compares countries. Anyway, "as far as there is no production function underlying, it is not possible to calculate separately the contribution to the growth of technical progress (growth of TFP) and the growth of each factor" (ibid) 18.

It is, of course, always possible to calculate terms such as the ones given by the formula (7), while knowing that it derives from an accounting identity and not from relations which would reflect the technical evolution of the economy. Remains to interpret them, while they have been got rid of their ideological gangue (marginalist theory of distribution).

Conclusion

Parmi les innombrables hypothèses faites par la plupart des théoriciens néoclassiques, il y en a trois qui sont un défi au bon sens tout en étant fondamentales pour eux. Il y a d’abord celle qui dit qu’en concurrence parfaite tous les agents sont preneurs de prix – ce qui suppose un système très centralisé, aux antipodes du monde que le modèle prétend décrire. Vient ensuite l’hypothèse de l’« agent représentatif » dont le choix intertemporel est censé reproduire celui de l’économie toute entière 19. Il y a, enfin, la fonction de production agrégée, sorte de recension des diverses techniques dont dispose une économie à un moment donné. L’argument ultime – en fait, le seul – avancé pour justifier les hypothèses de concurrence parfaite et de l’agent représentatif est qu’elles permettent d’obtenir des résultats (théoriques) incontestables, puisque fruits de déductions mathématiques – sans que cela ne les rende pertinents pour autant. La situation est différente en ce qui concerne la fonction de production agrégée : indéfendable sur le plan théorique – elle n’a, ni ne peut avoir, de « fondement microéconomique » –, elle tirerait sa légitimité de son adéquation aux données. Le livre de Felipe et McCombie montre que cette légitimation « par les faits » est un leurre. Ils en apportent la preuve aussi bien sur le plan théorique – explication par l’identité comptable et les faits stylisés – que sur le plan pratique – simulations et études économétriques. En dépit de cette démolition en règle, les fonctions de production agrégées continuent, et vont sans doute continuer, à peupler les manuels ainsi que les travaux théoriques et appliqués. En fait, depuis belle lurette la question de l’agrégation des biens et des fonctions n’est plus à l’ordre du jour. Elle a pratiquement disparu dans l’enseignement.

Among the countless assumptions made by most of the neoclassical theorists, there are three who are a challenge to common sense while being fundamental to them. First, there is the one which states that in perfect competition all agents are price takers - this implies a highly centralized system, the precise antithesis of what the model claims describe. Then comes the hypothesis of the "representative agent" which the intertemporal choice is supposed to reproduce that of the whole economy 19. There is, finally, the aggregate production function, a sort of review of the various techniques available to an economy at a given time. The final argument - in fact, the only one - advanced to justify the hypothesis of perfect competition and of the representative agent is that they allow you to obtain unquestionable (theoretical) results, since producs of mathematical deductions - without making it relevant for all that. The situation is different when it comes to the aggregate production function: indefensible on the theoretical level - it doesn’t have, nor can have, any " microeconomic foundation" -, it would draw its legitimacy from its adequacy to the data. The book of Felipe and McCombie shows that this legitimization" by the facts" is an illusion/ decoy. They bring in the evidence both on the theoretical level – the explanation according to the accounting identity and the stylized facts - and on a practical level - simulations and econometric studies. In spite of this demolition in rule, the functions of aggregated production continue, and will surely continue, to populate the manuals as well as theoretical and applied works. In fact, for a long time the issue of the aggregation of goods and functions is no longer on the agenda. It has virtually disappeared from the academic world/ teaching/being taught.

Une bonne partie de la profession semble considérer, comme Piketty, qu’elle a été réglée – notamment par Solow. Il n’en est rien, évidemment. Deux raisons peuvent expliquer une telle attitude de la part de ceux qui ne cessent pourtant d’affirmer leur attachement à la « rigueur » dans leurs analyses. L’une est d’ordre idéologique. Il est réconfortant de pouvoir affirmer que le problème (délicat) de la répartition du revenu est résolu de façon simple – et efficace pour la société – par la rétribution de chacun selon sa productivité marginale, pourvu que les marchés soient « concurrentiels ». L’autre est d’ordre pratique : l’« industrie » qui s’est construite autour de la fonction de production agrégée est tellement importante que la remettre en cause serait catastrophique pour ceux qui vivent d’elle, tout en la faisant prospérer. Le livre de Felipe et McCombie ne changera probablement pas grand-chose à cette situation. Il fournit toutefois à celui qui se pose des questions sur la fonction de production agrégée – et sur la théorie de la répartition qu’elle sous-tend – toutes les réponses qu’il cherche, aussi bien sur le plan théorique que pratique. C’est pourquoi il est impératif que, au moins, ce livre figure dans toutes les bibliothèques d’économie de France – et d’ailleurs.

A good part of the profession, like Piketty, seems to think that it has been settled - specifically by Solow. It is nothing, of course. Two reasons can explain such an attitude from of those who do not cease yet to state their commitment to the "rigor" in their analyzes. The first one is ideological. It is reassuring to be able to affirm that the (delicate) issue of income distribution has been solved in such a simple - and effective for the society - way by the retribution of each (what?) according to its marginal productivity, provided that the markets are "competitive". The other one is of a practical nature: the "industry" which is built around the aggregate production function is so important that questioning it again would be catastrophic for those who live thanks to it, while making it thrive. The book of Felipe and McCombie is not likely to change much in this situation. It will, however, provide to the one questioning the aggregate production function - and on the underlying theory of the distribution - all the answers he seeks, on the theoretical plan as well as practical. That is why it is imperative that, at least, this book is present in all the Economic libraries of France - and abroad